# Minicorso: An introduction to numerical methods for stochastic computations

May 30, 2017

## Progetto 1

Definiamo passeggiata aleatoria non simmetrica una successione di variabili aleatorie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

i) $X_0 = 0$

ii) $X_n$ ha incrementi indipendenti

iii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$: $P(X_n - X_{n-1} = u) = p$ e $P(X_n - X_{n-1} = -d) = 1 - p$, dove $u, d \in \mathbb{R}^+$

Si richiede di:

- Simulare 100 di traiettorie di tale processo per la scelta $u = 2, d = 1$ e per diversi valori di $p \in [0, 1]$
- Costruire due intervalli di confidenza per $X_n$ che contengano rispettivamente il 95% e il 90% delle traiettorie simulate.

## Progetto 2

Definiamo passeggiata aleatoria in $2D$ una successione di variabili aleatorie $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

i) $X_0 = 0$

ii) $X_n$ ha incrementi indipendenti

iii) L'incremento $n-$esimo $I_n = X_n - X_{n-1}$ è scelto in maniera equiprobabile tra $\{1, 0\}, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, \{0, -1\}$

Si richiede di:

- Simulare tale processo
- Cosa succede se rimuoviamo l'ipotesi di equiprobabilità tra incrementi? Mostrarlo con esperimenti numerici.

## Progetto 3

Sia $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processo di Wiener e $\alpha > 0$. Si richiede di:

- Simulare una traiettoria del processo

$$X_t(\omega) = \int_0^t e^{\alpha W_s} dW_s(\omega), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

  per una scelta di $\alpha > 0$.

- Attraverso di usuali regole di integrazione risolvere il precedente integrale e, a partire dallo stesso processo di Wiener, simularne l'andamento in una nuova finestra grafica.

- Confrontare le traiettorie.

## Progetto 4

La seguente SDE definisce un processo di Ornstein-Uhlenbeck

$$\begin{cases} dX_t &= (\alpha - \beta X_t)dt + \gamma dW_t, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ X_{t_0} &= X_0. \end{cases}$$

Si scelgano i seguenti parametri $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1/2$. Si richiede di:

- Simulare $10^2$ traiettorie di tale processo nell'intervallo temporale $[0, 1]$ con $\Delta t = 10^{-3}$. Utilizzare il metodo di Eulero-Maruyama e come dato iniziale considerare $X_0 = 5$.

- Cosa osserviamo all'aumentare del tempo? Giustificare la risposta numericamente. (hint: creare istogrammi a diversi istanti temporale, function `hist`)